DSSSB TGT

PART (B)

MATHS

MULTIVARIATE CALCULUS

Part -3

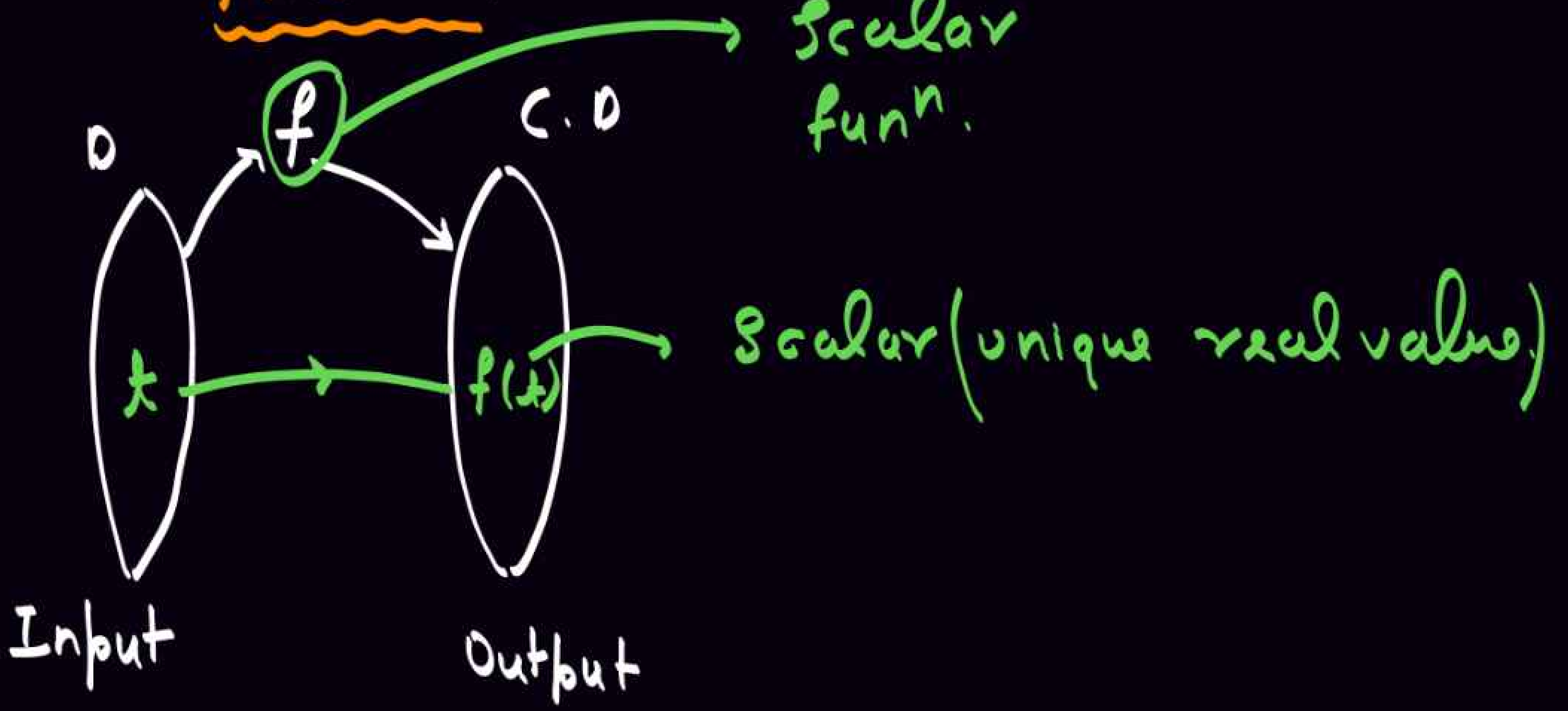
LIVE 30/09/2024 08:00 AM

Vector Calculus

Vector Calculus

- Vector diff
  - diff of a vector fun^n
  - Gradient
  - divergence
  - Curl
- Vector integrals
  - line integral
  - Surface
  - Volume
  - Gauss, Green and Stoke's theorem.

function



Scalar Function

A function f which associates to each scalar t belonging to its domain, a unique real number, then $f(t)$ is known as scalar function of the scalar variable t.

एक फ़ंक्शन f जो अपने डोमेन से संबंधित प्रत्येक स्केलर t को एक अद्वितीय वास्तविक संख्या से जोड़ता है, तो f(t) को स्केलर चर t के स्केलर फ़ंक्शन के रूप में जाना जाता है।

For example:-

$f(t) = 2t + 3$ **for all** $t \in$ **Domain**

सभी t∈ डोमेन के लिए f(t)=2t+3

Here for each scalar t**, there exists a unique real number** $f(t)$**.**

यहाँ प्रत्येक स्केलर t के लिए, एक अद्वितीय वास्तविक संख्या f(t) मौजूद है।

$f(t) = 2t + 3$

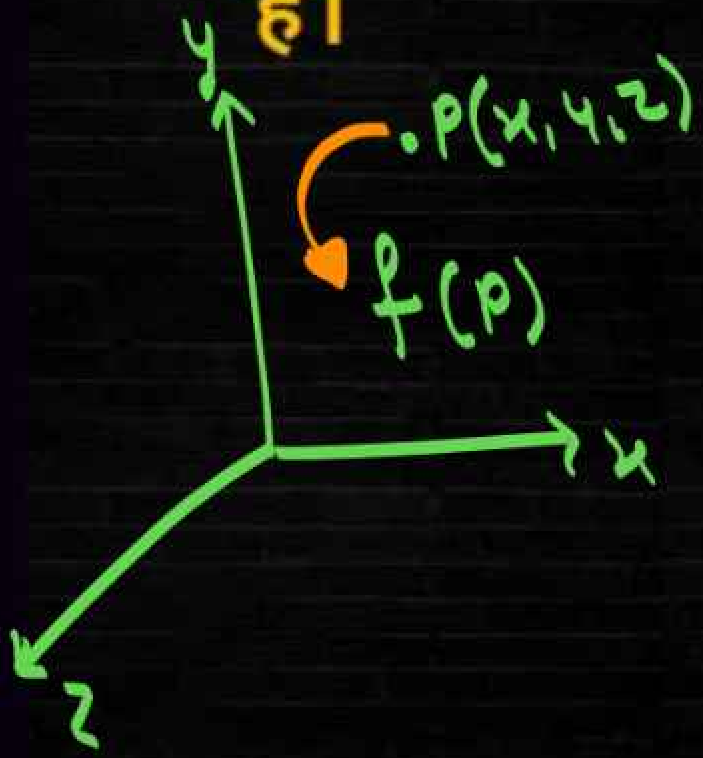
$f(2) = 2 \times 2 + 3$

$= 7$

Scalar Point Function

For each point $P(x, y, z)$ in a region R of space, there corresponds a unique scalar denoted $f(P)$, is known as scalar point function.

अंतरिक्ष के क्षेत्र R में प्रत्येक बिंदु P(x,y,z) के लिए एक अद्वितीय अदिश होता है जिसे f(P) से दर्शाया जाता है, जिसे अदिश बिंदु फ़ंक्शन के रूप में जाना जाता है।



For example:-

To each point $P(x, y, z)$ **on earth surface, suppose** $f(x, y, z)$ **denotes the temperature function which is given by** $f(P) = f(x, y, z) = 2xy + yz^2$

पृथ्वी की सतह पर प्रत्येक बिंदु P(x,y,z) के लिए, मान लीजिए f(x,y,z) तापमान फ़ंक्शन को दर्शाता है जो $f(P) = f(x, y, z) = 2xy + yz^2$ **द्वारा दिया गया है**

$f(P) \Rightarrow f(x,y,z) \Rightarrow 2xy + yz^2$

$f(1,2,3) \Rightarrow 2\times 1\times 2 + 2\times 3^2$

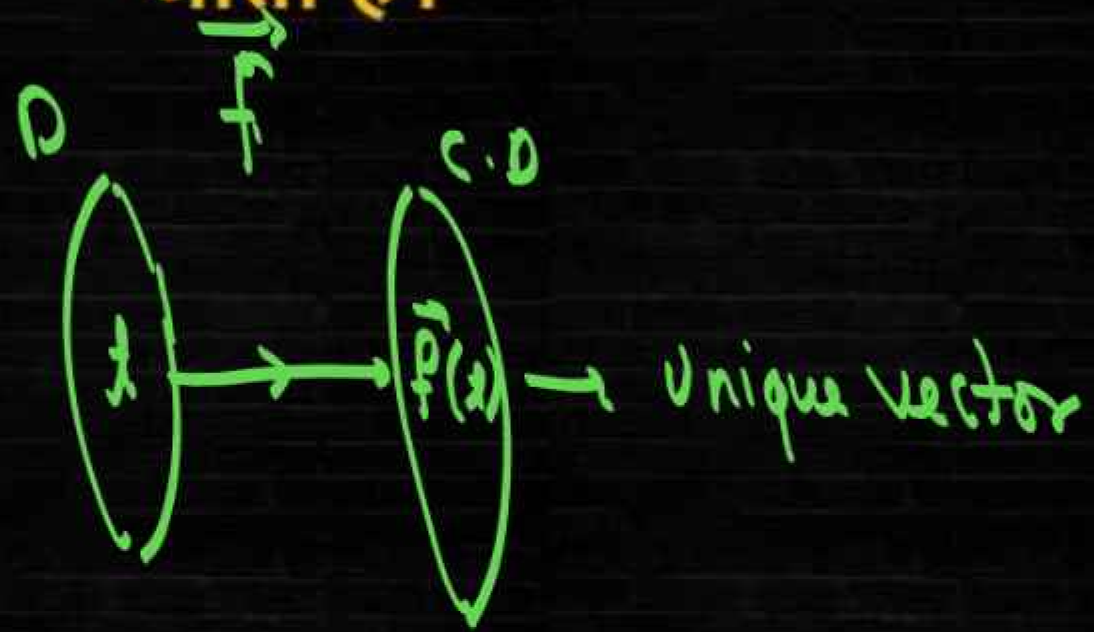
$\Rightarrow 4 + 18$

$\Rightarrow 22$ Ans

Vector Function

A function $\vec{f}$ which associates to each scalar t belonging to its domain, a unique vector, then $\vec{f}(t)$ is known as vector function of the scalar variable t.

एक फ़ंक्शन $\vec{f}$ जो अपने डोमेन से संबंधित प्रत्येक स्केलर t को एक अद्वितीय वेक्टर से जोड़ता है, तो $\vec{f}$(t) को स्केलर चर t के वेक्टर फ़ंक्शन के रूप में जाना जाता है।



For example:-

$\vec{f}(t) = 3t\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 0\hat{k}$ **for all** $t \in$ **Domain**

$\vec{f}(t) = 3t\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 0\hat{k}$ **सभी t∈ डोमेन के लिए**

Here for each scalar t**, there exists a unique vector** $f(t)$**.**

यहाँ प्रत्येक स्केलर t के लिए, एक अद्वितीय वेक्टर f(t) मौजूद है।

$\vec{f}(t) = 3t\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}$

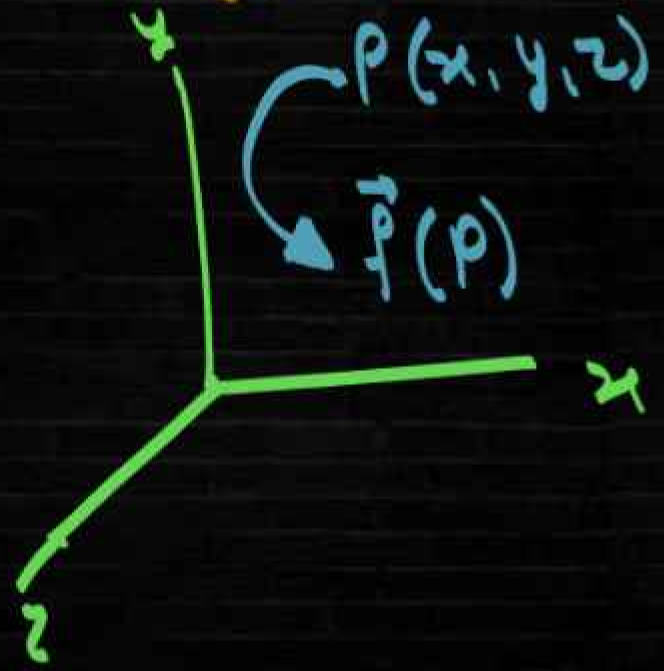
$\vec{f}(2) = 6\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}$

$\checkmark$

Vector Point Function

For each point $P(x, y, z)$ in a region R of space, there corresponds a unique vector denoted $\vec{f}(P)$, is known as vector point function.

अंतरिक्ष के क्षेत्र R में प्रत्येक बिंदु P(x,y,z) के लिए एक अद्वितीय सदिश होता है जिसे $\vec{f}(P)$ से दर्शाया जाता है, जिसे सदिश बिंदु फ़ंक्शन के रूप में जाना जाता है।



For example:-

To each point $P(x,y,z)$ **on the curve C , suppose** $\vec{f}(x,y,z)$ **denotes the velocity function which is given by** $\vec{f}(P) = \vec{f}(x,y,z) = xy\hat{\imath} + yz^2\hat{\jmath} + 2z\hat{k}$

वक्र C पर प्रत्येक बिंदु P(x,y,z) के लिए, मान लीजिए $\vec{f}(x,y,z)$ **वेग फ़ंक्शन को दर्शाता है जो** $\vec{f}(P) = \vec{f}(x,y,z) = xy\hat{\imath} + yz^2\hat{\jmath} + 2z\hat{k}$ **द्वारा दिया गया है**

$\vec{f}(P) = \vec{f}(x,y,z) \Rightarrow xy\hat{i} + yz^2\hat{j} + 2z\hat{k}$

$\vec{f}(1,2,3) \Rightarrow 2\hat{i} + 18\hat{j} + 6\hat{k}$

Derivative of a Vector Function

Let $\vec{r} = \vec{f}(t)$ be a vector function of the scalar variable t. Let δt be the small change in t and $\delta\vec{r}$ be the corresponding change in $\vec{r}$.

मान लीजिए $\boxed{\vec{r} = \vec{f}(t)}$ अदिश चर t का एक सदिश फलन है। मान लीजिए δt, t में होने वाला छोटा परिवर्तन है तथा $\delta\vec{r}$, $\vec{r}$ में होने वाला संगत परिवर्तन है।

So, $\boxed{\vec{r} + \delta\vec{r} = \vec{f}(t + \delta t)}$

$$\Rightarrow \delta\vec{r} = \vec{f}(t + \delta t) - \vec{r}$$

$$\Rightarrow \delta\vec{r} = \vec{f}(t + \delta t) - \vec{f}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \frac{\vec{f}(t+\delta t) - \vec{f}(t)}{\delta t}$$

$$y = f(x). \quad — (1)$$

$$y + \delta y = f(x + \delta x). \quad — (2)$$

(2) - (1)

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta(x)}$$

$$\boxed{\frac{\delta y}{\delta x} = f'(x)}$$

If $\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t+\delta t)-\vec{f}(t)}{\delta t}$ exists, then the value of this limit is called derivative of vector function $\vec{r} = \vec{f}(t)$ with respect to t and is denoted by $\frac{d\vec{r}}{dt}$ or $\frac{d\vec{f}}{dt}$.

यदि $\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t+\delta t)-\vec{f}(t)}{\delta t}$ मौजूद है, तो इस सीमा के मान को t के संबंध में सदिश फ़ंक्शन $\vec{r} = \vec{f}(t)$ का व्युत्पन्न कहा जाता है और इसे $\frac{d\vec{r}}{dt}$ या $\frac{d\vec{f}}{dt}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

Note:-

1. $\frac{d\vec{f}}{dt}$ is a vector quantity.

$\frac{d\vec{f}}{dt}$ एक सदिश राशि है।

2. In order to differentiate a vector we should differentiate its components.

किसी सदिश को विभेदित करने के लिए हमें उसके घटकों को विभेदित करना चाहिए।

Example - 1

If $\vec{r} = \sin t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + t\hat{k}$**, then**

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \cos t\hat{\imath} - \sin t\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\sin t\hat{\imath} - \cos t\hat{\jmath}$$

$\vec{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + t\hat{k}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j} + \hat{k}$

$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow -\sin t\cdot\hat{i} - \cos t\,\hat{j} + 0.$

Results:-

1. If vector $\vec{f}$ is constant, then $\boxed{\frac{d\vec{f}}{dt} = 0.}$

यदि सदिश $\vec{f}$ स्थिर है, तो $\frac{d\vec{f}}{dt} = 0.$

2. If magnitude of vector $\vec{f}$ is constant, then $\boxed{\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = 0}$

यदि सदिश $\vec{f}$ का परिमाण स्थिर है, तो $\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = 0$

3. If direction of vector $\vec{f}$ is constant, then $\boxed{\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} = 0}$

यदि सदिश $\vec{f}$ की दिशा स्थिर है, तो $\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} = 0$

Velocity and Acceleration

If $\vec{r} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$ be the position vector of a moving point (x, y, z) and parameter t stands for time, then

यदि $\vec{r} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$ एक गतिशील बिंदु (x,y,z) का स्थिति सदिश हो और पैरामीटर t समय को दर्शाता हो, तो

1. Velocity at any time t is represented by $\vec{v}$, which is given by $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.}$

किसी भी समय t पर वेग $\vec{v}$ द्वारा दर्शाया जाता है, जिसे $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

2. Velocity in the direction of any vector $\vec{a}$ is given by $\boxed{\vec{v} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.}$

किसी भी सदिश $\vec{a}$ की दिशा में वेग $\vec{v} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

3. Acceleration of the moving point at any time t is given by $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$.

किसी भी समय t पर गतिशील बिंदु का त्वरण $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

4. Acceleration of the moving point at any time t in the direction of vector $\vec{a}$ is given by $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$. $\hat{a}$

किसी भी समय t पर सदिश $\vec{a}$ की दिशा में गतिमान बिंदु का त्वरण $\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ द्वारा दिया जाता है।

Example-2

A particle moves along the curves $x = 3t^2, y = t^2 - 2t, z = t^3$. Find its velocity and acceleration at $t = 1$ in the direction of vector $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.

एक कण वक्र $x = 3t^2, y = t^2 - 2t, z = t^3$ के अनुदिश गति करता है। t=1 पर सदिश $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ की दिशा में इसका वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए।

Home-work