

Multivariate calculus

vector $\times$ calculus

Vector Differential Operator

The vector differential operator denoted by ∇ called del or nabla is defined as

∇ द्वारा निरूपित सदिश अवकल ऑपरेटर जिसे डेल या नाबला कहा जाता है, को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

vector

Component

Note:-

∇ is like a vector and $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ and $\frac{\partial}{\partial z}$ are known as its components along $\hat{i}$, $\hat{j}$ and $\hat{k}$ respectively.

∇ एक सदिश की तरह है और $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ और $\frac{\partial}{\partial z}$ क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के साथ इसके घटकों के रूप में जाने जाते हैं।



Gradient

Let f be a scalar point function, then gradient of f is denoted by ∇f and is defined as

मान लें कि f एक अदिश बिंदु फंक्शन है, तो f का ग्रेडिएंट ∇f द्वारा दर्शाया जाता है और इसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

Scalar
'f'

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) f$$

OR

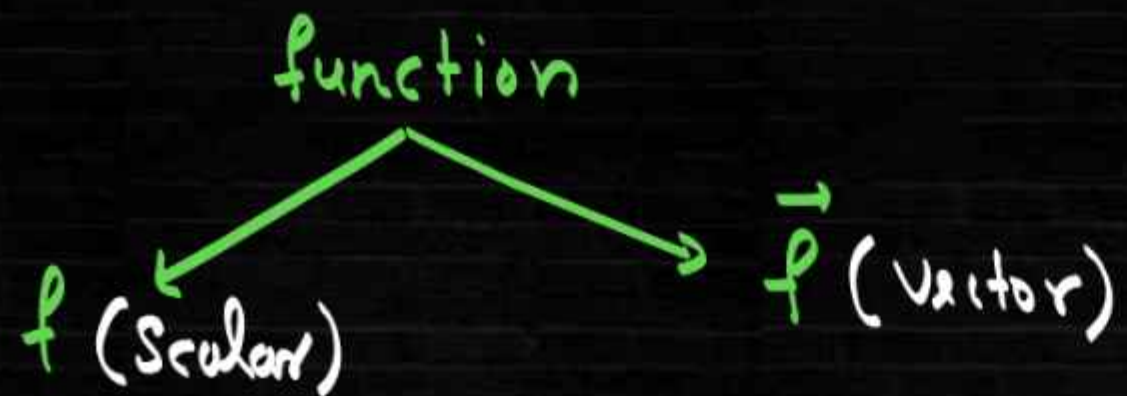
Vector.Scalar
 $\nabla \cdot 'f'$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Note:-

f be a scalar point function but ∇f gives a vector.

f एक अदिश बिंदु फलन है लेकिन ∇f एक सदिश देता है।



$\nabla f \rightarrow$ Gradient.

$\nabla \cdot \vec{f} \rightarrow$ Divergence

$\nabla \times \vec{f} \rightarrow$ Curl

Results:-

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

2. $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$

3. If f is constant function, then $\nabla f = 0$.

4. $\nabla(f \cdot g) = f \nabla g + g \nabla f$

5. $\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$

✓ 6. If $r = |\vec{r}|$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then $\nabla r^n = n r^{n-1} \vec{r}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} r^2 = 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial z} r^2 = 2z$$

$$\frac{\partial}{\partial y} r^2 = 2y$$

$$\begin{aligned} \nabla r^n &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot r^n \\ &= \frac{\partial}{\partial x} r^n \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} r^n \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} r^n \hat{k} \\ &= n r^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} r \hat{i} + n r^{n-1} \frac{\partial}{\partial y} r \hat{j} + n r^{n-1} \frac{\partial}{\partial z} r \hat{k} \end{aligned}$$

Example-1

If $f(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2$, then find ∇f at the point $(1, 2, 3)$.

यदि $f(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2$, तो बिंदु $(1, 2, 3)$ पर ∇f ज्ञात कीजिए।

$$\nabla f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \quad \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & z \end{matrix}$$

$$\nabla f = (2xy + y^2) \hat{i} + (x^2 + 2xy) \hat{j} + 2z \hat{k}$$

$$\nabla f \Rightarrow (2 \times 1 \times 2 + 2^2) \hat{i} + (1 + 2 \times 1 \times 2) \hat{j} + 2 \times 3 \hat{k}$$

$$\nabla f = 8\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$$

velocity

if $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ be the position vector of moving point (x, y, z) and parameter t stands for time, then.

①. Velocity at any time t is represented by $\vec{v}$ which is given by $\frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

acceleration
($\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$)

② Velocity in the direction of any vector $\vec{a}$ is given by.

$$\vec{v} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Level surface

Suppose $\phi(x, y, z)$ is a scalar field over the region R , then the points satisfying an equation of the type $\phi(x, y, z) = c$ represent a level surface.

मान लीजिए कि $\phi(x, y, z)$ क्षेत्र R पर एक अदिश क्षेत्र है, तो $\phi(x, y, z) = c$ प्रकार के समीकरण को संतुष्ट करने वाले बिंदु एक समतल सतह का प्रतिनिधित्व करते हैं।

Where c is an arbitrary constant, represent a family of level surfaces.

जहाँ c एक मनमाना स्थिरांक है, समतल सतहों के एक परिवार का प्रतिनिधित्व करता है।

Directional Derivatives of a scalar Point Function

Let $\phi(x, y, z)$ be a scalar field in region R .

मान लीजिए कि $\phi(x, y, z)$ क्षेत्र R में एक अदिश क्षेत्र है।

Suppose $P(x, y, z)$ is a point in the region R and $Q(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ is another point in the neighbourhood of Point P in the direction of a given unit vector $\hat{a}$.

मान लीजिए कि $P(x, y, z)$ क्षेत्र R में एक बिंदु है और $Q(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ किसी दिए गए इकाई सदिश $\hat{a}$ की दिशा में बिंदु P के पड़ोस में एक अन्य बिंदु पर है।

Then $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\phi(Q) - \phi(P)}{PQ}$, if it exists, is called the directional derivative of ϕ at P in the direction of $\hat{a}$.

तब $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\phi(Q) - \phi(P)}{PQ}$, यदि यह मौजूद है, तो इसे $\hat{a}$ की दिशा में P पर ϕ का दिशात्मक व्युत्पन्न कहा जाता है।

Geometrical Interpretation of Directional Derivatives

Let $PQ = \delta s$ be the small element in the direction of unit vector $\hat{a}$.

मान लें कि $PQ = \delta s$ इकाई सदिश $\hat{a}$ की दिशा में छोटा तत्व है।

Then $\frac{\delta \phi}{\delta s} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\phi(Q) - \phi(P)}{PQ}$ represents the rate change of ϕ per unit distance in the direction of $\hat{a}$.

फिर $\frac{\delta \phi}{\delta s} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\phi(Q) - \phi(P)}{PQ}$ $\hat{a}$ की दिशा में प्रति इकाई दूरी पर ϕ के दर परिवर्तन को दर्शाता है।

Thus if $Q \rightarrow P$, then $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\phi(Q) - \phi(P)}{PQ} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \phi}{\delta s} = \frac{d\phi}{ds}$ gives the rate of change of ϕ with respect to distance at a point in the direction of $\hat{a}$.

इस प्रकार यदि $Q \rightarrow P$, तो $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\phi(Q) - \phi(P)}{PQ} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \phi}{\delta s} = \frac{d\phi}{ds} \hat{a}$ की दिशा में एक बिंदु पर दूरी के संबंध में ϕ के परिवर्तन की दर देता है।

Results:-

1. The directional derivative of a scalar point function ϕ at a point $P(x, y, z)$ in the direction of vector $\vec{a}$ is given by $\nabla\phi \cdot \hat{a}$

सदिश $\vec{a}$ की दिशा में एक बिंदु $P(x, y, z)$ पर एक अदिश बिंदु फंक्शन ϕ का दिशात्मक व्युत्पन्न $\nabla\phi \cdot \hat{a}$ द्वारा दिया जाता है।

2. Maximum value of directional derivative occurs in the direction of grad ϕ and which is given by $|\text{grad } \phi|$.

दिशात्मक व्युत्पन्न का अधिकतम मान $\text{grad } \phi$ की दिशा में होता है और जिसे $|\text{grad } \phi|$ द्वारा दिया जाता है।

Equation of Tangent Plane

If $\phi(x, y, z) = c$ be the equation of level surface, then equation of tangent plane at a point $P(x, y, z)$ is given by

यदि $\phi(x, y, z) = c$ समतल सतह का समीकरण है, तो बिंदु $P(x, y, z)$ पर स्पर्शरेखा समतल का समीकरण निम्न प्रकार दिया गया है

$$(X - x) \frac{\partial \phi}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Equation of Normal

If $\phi(x, y, z) = c$ be the equation of level surface, then equation of Normal at a point $P(x, y, z)$ is given by

यदि $\phi(x, y, z) = c$ समतल सतह का समीकरण है, तो बिंदु $P(x, y, z)$ पर सामान्य का समीकरण इस प्रकार दिया गया है

$$\frac{(X - x)}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{(Y - y)}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = \frac{(Z - z)}{\frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

Angle of intersection Between two Surfaces

The angle of intersection between two surfaces is the angle between the normals to the surfaces at the point of intersection.

दो सतहों के बीच प्रतिच्छेदन कोण प्रतिच्छेदन बिंदु पर सतहों के अभिलंबों के बीच का कोण होता है।

If two surfaces $\phi_1(x, y, z)$ and $\phi_2(x, y, z)$ intersect at an angle θ , then θ is the angle between $\nabla\phi_1$ and $\nabla\phi_2$ at the point of intersection and which is given by यदि दो सतहें $\phi_1(x, y, z)$ और $\phi_2(x, y, z)$ कोण θ पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो θ प्रतिच्छेदन बिंदु पर $\nabla\phi_1$ और $\nabla\phi_2$ के बीच का कोण है और जिसे निम्न प्रकार से दिया जाता है

$$\cos \theta = \frac{(\nabla\phi_1) \cdot (\nabla\phi_2)}{|\nabla\phi_1||\nabla\phi_2|}$$

Q. If $\vec{r} = (t + 1)\hat{i} + (t^2 + t + 1)\hat{j} + t^3\hat{k}$, then $\frac{d\vec{r}}{dt}$ at $t = -1$, is equal to

यदि $\vec{r} = (t + 1)\hat{i} + (t^2 + t + 1)\hat{j} + t^3\hat{k}$, तो $t = -1$ पर $\frac{d\vec{r}}{dt}$ किसके बराबर है

a) $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

b) $\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

c) $\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$

d) $\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

None-work