DSSSB TGT PART(B)

MATHS

RIEMANN INTEGRATION

Part -3

LIVE 10/10/2024 08:00 AM

Limit of function

TOPIC - Limit,Continuity, Differentiability,Riemann Integration,Measure Theory

1. limit of functions फलन की सीमा
2. Sequential criteria of limit, Algebra of limit of function सीमा के अनुक्रमिक मानदंड, फलन की सीमा का बीजगणित
3. Continuity, Uniform continuity, Sequence criteria of continuity निरंतरता, समान निरंतरता, निरंतरता के अनुक्रम मानदंड
4. Sequence of function, pointwise convergence, pointwise limit function, uniform convergent फलन का अनुक्रम, बिंदुवार अभिसरण, बिंदुवार सीमा फलन, समान अभिसरण

5. Series of functions, Abel's test, Dirchlet's test, algebra of Series of function फलन की श्रृंखला, एबेल का परीक्षण, डर्चलेट का परीक्षण, फलन की श्रृंखला का बीजगणित

6. Riemann integration, Refinement of a partition, upper and lower Riemann sums, Riemann integrability रीमैन एकीकरण, विभाजन का परिशोधन, ऊपरी और निचले रीमैन योग, रीमैन इंटीग्रेबिलिटी

7. Darboux's theorem, primitiveof a function, Mean value theorem डार्बौक्स प्रमेय, फलन का आदिम, माध्य मान प्रमेय

8. function of several variable, partial derivatives, limit of a function of two variables, differentiable function of two variables

कई चर का फलन, आंशिक व्युत्पन्न, दो चर के फलन की सीमा, दो चर का अवकलनीय फलन

9. second order partial derivatives, young's theorem, schwarz's theorem, the RiemannStieltjes integrals, integral as a limit sum द्वितीय क्रम आंशिक व्युत्पन्न, यंग का प्रमेय, श्वार्ट्ज का प्रमेय, रीमैनस्टिल्टेज इंटीग्रल, सीमा योग के रूप में इंटीग्रल

10. Measurable sets, the mean value theorem for several variables, diectional derivation, function of bounded variation and properties, Lipschitz function मापने योग्य सेट, कई चर के लिए माध्य मान प्रमेय, दिशात्मक व्युत्पत्ति, फलन सीमित भिन्नता और गुण, लिप्सचिट्ज़ फलन

Limit of function: If $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a real function and $a \in A'$. Then, f is said to have limit l at $x = a$, if for given $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|f(x) - l| < \varepsilon$, whenever $0 < |x - a| < \delta, x \in A$. यदि $f: A \subseteq R \to R$ एक वास्तविक फलन है और $a \in A'$ है। तब, f को $x = a$ पर सीमा l कहा जाता है, यदि दिए गए $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ के लिए

Sequential Criteria of limit: If $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Then, the following are equivalent – यदि $f:A\subseteq R\to R$, तो निम्नलिखित समतुल्य हैं –

How to do non- existence of limit:

(1) If a_n **converges to** $a(a_n \neq a); a \in A$ **and** $f(a_n)$ **is not convergent** $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)$ **does not exist.** यदि a_n अभिसरित होता है $a(a_n \neq a); a \in A$ तथा $f(a_n)$ अभिसारी नहीं है तो $\Rightarrow lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

(2) If $\{a_n\}$ **and** $\{b_n\}$ **both converge to** $a.; a_n \in A, b_n \in A; (a_n \neq a, b_n \neq a)$ **and** $\lim_{x\to a} f(a_n) \neq \lim_{x\to a} f(b_n) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)$ **does not exist.** यदि $\{a_n\}$ तथा $\{b_n\}$ दोनों अभिसरित होते हैं $a.; a_n \in A, b_n \in A; (a_n \neq a, b_n \neq a)$ तथा $lim_{x\to a} f(a_n) \neq lim_{x\to a} f(b_n) \Rightarrow lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

$\sin x \to [-1, 1]$.

Q. $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **exist or not?**

$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ मौजूद है या नहीं?

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{0}\right) \Rightarrow \sin(\infty) \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

limit does not exist.

Q. $\lim_{x\to \infty} \sin(x)$ **exist or not?**

प्रश्न: $\lim_{x\to \infty} \sin(x)$ मौजूद है या नहीं?

$\underline{\underline{\sin(\infty)}}$ limit does not exist.

Sequential criteria for Rational and Irrational:

$\lim_{x \to \infty} f(x) \Rightarrow$ Rational ও হবে না -

$$f(x) = \begin{cases} p(x) : \text{Rational} \longrightarrow 1 \\ q(x) : \text{Irrational} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to a}$

$$\boxed{p(x) - q(x) = 0}$$

Existence of Limit : $f(x) = \begin{cases} p(x), & x \in Q \\ q(x), & x \in Q^c \end{cases}$

Then, limit of $f(x)$ at a point $x = a$ exist if $f(a) - q(a) = 0$

तब, बिंदु x=a पर f(x) की सीमा तब विद्यमान होती है जब $\boxed{f(a)-q(a)=0}$

Q. $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \in Q \\ x; & x \in Q^c \end{cases}$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$\boxed{x = 0, 1}$ limit exist at $x = 0, 1$.

Q. $f(x) = \begin{cases} \sin x; & x \in Q \\ \cos x, & x \in Q^c \end{cases}$

$\sin x - \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

$\tan x = 1$

$x = \pi/4$

limit exist at $x = \pi/4$

Q. $f(x) = \begin{cases} 5; & x \in Q \\ 7; & x \in Q^c \end{cases}$

$5 - 7 = 0$

$\boxed{-2 \neq 0}$

limit does not exist.

Q. $f(x) = \begin{cases} x; & x \in Q \\ \sin x; & x \in Q^c \end{cases}$

$x - \sin x = 0$

$x = \sin x$

limit exist at only $x = 0$

Q. $f(x) = \begin{cases} \sin x; & x \in Q \\ \sinh x; & x \in Q^c \end{cases}$

$\sin x - \sinh x = 0$

$\boxed{\sin x = \sinh x}$ limit exist at only $\boxed{x=0}$

Q. $f(x) = \begin{cases} \cos x; & x \in Q \\ \cosh x; & x \in Q^c \end{cases}$

$\cos x - \cosh x = 0$

$\boxed{\cos x = \cosh x}$ limit exist at only $\boxed{x=0}$

Normal trigo and hyperbolic trigo is equal only one point at 0.

Q. $\lim_{x\to\infty} \cos x$ **exist or not?**

$\lim_{x\to\infty} \cos x$ अस्तित्व में है या नहीं?

$\cos(\infty)$ limit does not exist.

Note

(1) $\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$ **if** $\alpha > 0$

(2) $\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$

(3) If $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; g **is bounded and** $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = 0.}$

Then, $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0}$

Algebra of limit of function: $\lim_{x\to a} f(x) = A \,\&\, \lim_{x\to a} g(x) = B$

(1) $\lim_{x\to a} \lambda_1 f(x) \pm \lambda_2 g(x) = \lim_{x\to a} \lambda_1 f(x) \pm \lim_{x\to a} \lambda_2 g(x)$.

(2) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$: $B \neq 0$

(3) $\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$

(4) $\lim_{x\to a} (f \circ g)$. $\longrightarrow$ limit exist or not exist.

Composition

Q. Let $f(x)$ be defined as follows:

मान लीजिए f(x) को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

What can be said about the sequence $\left(x_n = \frac{1}{n}\right.$ where $n \in \mathbb{N}$ and x_n is rational?

(a) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ **does not exist.**

(d) The function is continuous, so the limit is 0^2.

Q. Suppose $\lim_{x\to c} f(x) = L$ and $\lim_{x\to c} g(x) = M$. Which of the following is not true about the algebra of limits?

मान लीजिए $lim_{x\to c} f(x) = L$ और $lim_{x\to c} g(x) = M$. निम्नलिखित में से कौन सा सीमा के बीजगणित के बारे में सत्य नहीं है?

$\lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

(a) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L + M$

(b) $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = LM$

(c) $\lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$ **if** $M \neq 0$

(d) $\lim_{x\to c} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$.

Q. Let $f(x)$ be defined as follows:

मान लीजिए f(x) को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Which of the following is true regarding $\lim_{x \to 1} f(x)$?

(a) The limit exists and is equal to 1.

(b) The limit exists and is equal to 0 .

(c) The limit does not exist.

(d) The limit is 0 for rational and 1 for irrationals.

Q. If $\lim_{x\to c} f(x) = L$, which of the following statements is true according to the sequential criteria for limits?

यदि $lim_{x\to c} f(x) = L$, तो सीमाओं के अनुक्रमिक मानदंड के अनुसार निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

(a) For every sequence $x_n \to c$, we must have $\lim_{x\to c} f(x_n) = L$.

(b) There exists a sequence $x_n \to c$ such that $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(c) The limit exists only if $f(x)$ is continuous at c.

(d) For every sequence $x_n \to c$, we must have $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

Self Solve

Q. If $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, which of the following statements must be true according to the sequential criterion for limits?

यदि $lim_{x\to 2} f(x) = 3$ है, तो सीमाओं के लिए अनुक्रमिक मानदंड के अनुसार निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य होना चाहिए?

(a) The limit exists only if $f(x)$ is continuous at $x = 2$.

(b) For any sequence $x_n \to 2$, we must have $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3$.

(c) The limit exists only for rational values of x.

(d) $f(x)$ must be differentiable at $x = 2$.

Self solve

Q. Let $f(x)$ be the step function:

मान लें कि f(x) चरण फलन है:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ 1 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

What is $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ and $\lim_{x \to 1^+} f(x)$?

(a) 0 and 0

(b) 0 and 1

(c) 1 and 0

(d) 1 and 1

0 , 1

Q. Consider the piecewise function:

टुकड़ावार फलन पर विचार करें:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 0 \\ x^2 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

What is $\lim_{x \to 0} f(x)$ **?**

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) The limit does not exist.

$\lim_{x \to 0^-} 2x$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^+} x^2$

$2 \times 0 = 0^2$

$\boxed{0 = 0}$

//

Q. Let $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ **and** $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$**. What is** $\lim_{x\to 1}[f(x) \cdot g(x)]$ **?**

मान लीजिए $\boxed{lim_{x\to 1} f(x) = 4}$ और $\boxed{lim_{x\to 1} g(x) = 5}$ है। $lim_{x\to 1}[f(x) \cdot g(x)]$ क्या है?

(a) 9

(b) 20

(c) 1

(d) The limit does not exist.

4×5

$= 20$

Q. The limit of the function $\{\log(1+x)\}/x$ **as** $x \to 0$

$x \to 0$ पर $\{log\ (1+x)\}/x$ फंक्शन की सीमा

(a) 3

(b) 1

(c) 2

(d) 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \log(1 \pm nx) \Rightarrow \pm nx$$

$$\lim_{x \to 0} e^{\pm nx} - 1 \Rightarrow \pm nx$$

$$\lim_{x \to 0} \sin^3 ax \Rightarrow (ax)^3$$

Q. $[a, b)$ **is**

(a) Closed set

(b) Semi closed set

(c) Open set

(d) Null set

Q. The function f has limit at point $x = a$ if

फलन f की सीमा बिंदु x=a पर है यदि

(a) L.H.L. = R.H.L.

(b) L.H.L. $\geq$ R.H.L.

(c) L.H.L. $\neq$ R.H.L.

(d) L.H.L. $\leq$ R.H.L.

Limit exist

$\boxed{\text{LHL} = \text{R.H.L}}$

Q. $\lim_{x \to 0}\{\text{Sin}\,(ax)/\text{Sin}\,(bx)\}(a \neq 0, b \neq 0)$ **is**

(a) a. b

(b) a/b

(c) Does not exist

(d) b/a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \Rightarrow \frac{ax}{bx}$$

$$\frac{a}{b}$$